

**EXERCICE I - MOUVEMENT D'UNE GOUTTE D'ENCRE DANS  
UNE IMPRIMANTE À JET D'ENCRE (11 points)**

**PARTIE A : Modèle du condensateur plan****A.1. Donner l'unité de la capacité d'un condensateur dans le système international (SI).**

La capacité  $C$  s'exprime en farads (F).

**A.2. Montrer que les graphiques présentés en figures 4 et 5 respectent la relation 1.**

La figure 4 montre que la représentation graphique de  $C$  en fonction de  $S$  est une droite. On ne voit pas si elle passe ou non par l'origine.

L'équation de la droite est du type  $C = a.S + b$

Le coefficient directeur de la droite est donné, il vaut  $a = 1,76 \times 10^{-9}$  SI

Pour trouver l'ordonnée à l'origine  $b$ , on choisit un point sur la droite ( $S = 4,0 \times 10^{-4}$  ;  $C = 7 \times 10^{-13}$ ).

$$C = a.S + b$$

$$\text{donc } b = C - a.S$$

$$b = 7 \times 10^{-13} - 1,76 \times 10^{-9} \times 4,0 \times 10^{-4} = -4 \times 10^{-15} = -0,04 \times 10^{-13} \text{ SI}$$

On peut considérer que  $b$  est suffisamment proche de zéro pour modéliser la droite par une fonction linéaire.

On vérifie bien que  $C$  est proportionnelle à  $S$ .

De même avec la figure 5.

La figure 5 montre que la représentation graphique de  $C$  en fonction de  $\frac{1}{d}$  est une droite. On ne voit pas si elle passe ou non par l'origine.

L'équation de la droite est du type  $C = a.\frac{1}{d} + b$

Le coefficient directeur de la droite est donné, il vaut  $a = 1,7 \times 10^{-15}$  SI

Pour trouver l'ordonnée à l'origine  $b$ , on choisit un point sur la droite ( $\frac{1}{d} = 500$  ;  $C = 8,9 \times 10^{-13}$ ).

$$C = a.\frac{1}{d} + b$$

$$\text{donc } b = C - a.\frac{1}{d}$$

$$b = 8,9 \times 10^{-13} - 1,7 \times 10^{-15} \times 500 = 4 \times 10^{-14} = 0,4 \times 10^{-13} \text{ SI}$$

Cette fois, on ne peut pas considérer que  $b$  est suffisamment proche de zéro pour modéliser la droite par une fonction linéaire. Il s'agit d'une fonction affine.

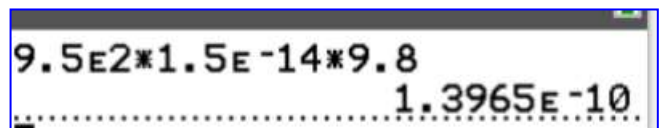
Donc on ne vérifie pas que  $C$  est proportionnelle à  $\frac{1}{d}$ .

**PARTIE B : Mouvement d'une goutte d'encre électriquement chargée****B.1. Trajectoire d'une goutte d'encre électriquement chargée dans un champ électrique uniforme****B.1.1. Vérifier quantitativement que l'hypothèse de négliger le poids de la goutte devant la force électrostatique est justifiée.**

$$P = m \cdot g$$

$$P = \rho \cdot V \cdot g$$

$$P = 9,5 \times 10^2 \times 1,5 \times 10^{-14} \times 9,8 = 1,4 \times 10^{-10} \text{ N}$$



$$9.5E2 * 1.5E-14 * 9.8 = 1.3965E-10$$

$$F_e = q \cdot E$$

$$F_e = q \cdot \frac{U}{d}$$

$$F_e = 2,0 \times 10^{-13} \times \frac{3,0 \times 10^3}{5,0 \times 10^{-3}} = 1,2 \times 10^{-7} \text{ N}$$

(On ne tient pas compte du signe négatif de  $q$  pour calculer la norme de  $F_e$ .)

$$\frac{F_e}{P} = \frac{1,2 \times 10^{-7}}{1,3965 \times 10^{-10}} = 8,6 \times 10^2 \text{ ou } F_e = 8,6 \times 10^2 \cdot P$$

La force électrostatique est près de 900 fois plus grande que la force poids, l'hypothèse est vérifiée.

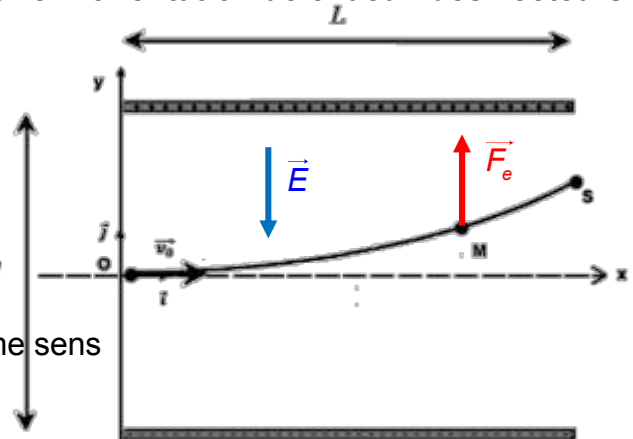
**B.1.2. Compléter le schéma de l'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE (page 13/13) en représentant sans souci d'échelle le champ électrostatique  $\vec{E}$  et la force électrostatique  $\vec{F}_e$  que subit la goutte d'encre au point M. Justifier l'orientation de chacun des vecteurs.**

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  est orienté vers la plaque chargée négativement.

Justification :

On sait qu'une particule de charge positive est attirée vers la plaque chargée négativement. Elle subit une force électrostatique vers le bas.

Et  $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$ , avec  $q > 0$  alors  $\vec{F}_e$  et  $\vec{E}$  ont le même sens



La force électrique est orientée vers la plaque chargée positivement

$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$ , avec  $q < 0$  alors  $\vec{F}_e$  et  $\vec{E}$  sont de sens opposés.

**B.1.3. Déterminer la valeur de la capacité  $C$  du condensateur plan de charge  $q_c$  soumis à la tension électrique  $U$ .**

$$q_c = C \cdot U$$

$$C = \frac{q_c}{U}$$

$$C = \frac{1,0 \times 10^{-9}}{3,0 \times 10^3} = 3,3 \times 10^{-13} \text{ F}$$

**B.1.4.1. Établir les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  du mouvement de la goutte d'encre.**

Système : {goutte d'encre}

Référentiel terrestre supposé galiléen

On applique la deuxième loi de Newton,  $\Sigma \vec{F}_{ext.} = m \cdot \vec{a}$

La force électrostatique prédomine sur les autres forces, alors  $\vec{F}_e = m \cdot \vec{a}$ .

$$q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

En projection selon les axes Ox et Oy du repère choisi et compte tenu du sens du vecteur  $\vec{E}$  indiqué sur le schéma et du signe négatif de  $q$  il vient :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{q}{m} \cdot E > 0 \end{cases}, \text{ alors } \vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} > 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ donc } a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} \text{ et } a_y = \frac{dv_y(t)}{dt}$$

Ainsi en primitivant on obtient  $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_y(t) = -\frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t + Cte_2 \end{cases}$

On détermine les constantes avec les conditions initiales.

Coordonnées du vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0 : \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$  on a :

$$v_0 = Cte_1$$

$$0 = 0 + Cte_2$$

Finalement :  $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -\frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t \end{cases}$

À chaque instant  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$  donc  $v_x = \frac{dx(t)}{dt}$  et  $v_y = \frac{dy(t)}{dt}$

En primitivant on obtient  $\vec{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t + Cte_3 \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t^2 + Cte_4 \end{cases}$

Conditions initiales, à  $t = 0$  s, la goutte est au point de coordonnées  $O(x(0) = 0; y(0) = 0)$  donc :

$$0 = 0 + Cte_3$$

$$0 = 0 + 0 + Cte_4$$

Finalement, on obtient les équations horaires  $\vec{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t^2 \end{cases}$

**B.1.4.2. En déduire que la trajectoire de la goutte d'encre au sein du condensateur plan**

**s'écrit :**  $y(x) = -\frac{q \cdot U}{2m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot x^2$ .

$$t = \frac{x(t)}{v_0}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot \left( \frac{x}{v_0} \right)^2$$

$$y(x) = -\frac{q \cdot U}{2m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot x^2$$

**B.1.4.3. Donner alors l'expression de l'ordonnée  $y_s$  de la goutte à la sortie S du condensateur.**

À la sortie du condensateur,  $x = L$ .

$$y_s = -\frac{q \cdot U}{2m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot L^2$$

## B.2. Impact de la goutte d'encre sur la feuille

### B.2.1. Justifier que la goutte suit un mouvement rectiligne uniforme entre le condensateur plan et la feuille.

D'après la première loi de Newton (principe d'inertie), si  $\Sigma \vec{F}_{ext.} = \vec{0}$  alors  $\vec{v} = \vec{Ct\acute{e}}$ , le mouvement est rectiligne et uniforme.

### B.2.2.1. Exprimer $\tan \alpha$ en fonction de O'Y et O'I d'une part et en fonction de SH et HI d'autre part.

$$\tan \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{O'Y}{O'I} = \frac{SH}{HI}$$

### B.2.2.2. En déduire que l'ordonnée Y du point d'impact de la goutte d'encre sur la feuille a pour expression : $Y = -\frac{q.U.L}{m.d.v_0^2} \cdot \left(\frac{L}{2} + D\right)$ .

$$\frac{O'Y}{O'I} = \frac{Y}{\frac{L}{2} + D}$$

$$\frac{SH}{HI} = \frac{y_s}{\frac{L}{2}}$$

$$\frac{Y}{\frac{L}{2} + D} = \frac{y_s}{\frac{L}{2}}$$

$$Y = \frac{-\frac{q.U}{2m.d.v_0^2} \cdot L^2}{\frac{L}{2}} \cdot \left(\frac{L}{2} + D\right) = -\frac{q.U}{2m.d.v_0^2} \cdot L^2 \cdot \frac{2}{L} \cdot \left(\frac{L}{2} + D\right) = -\frac{q.U.L}{m.d.v_0^2} \cdot \left(\frac{L}{2} + D\right)$$

### B.2.2.3. Déterminer dans quelle zone de la feuille, c'est-à-dire zone 1, 2 ou 3 de la figure 8, la goutte va se déposer.

On calcule Y.

$$Y = -\frac{-2,0 \times 10^{-13} \times 3,0 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-3}}{9,5 \times 10^2 \times 1,5 \times 10^{-14} \times 5,0 \times 10^{-3} \times 30^2} \times \left(\frac{20 \times 10^{-3}}{2} + 10 \times 10^{-3}\right)$$

$$Y = -3,7 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{-2\text{E-}13 \times 3\text{E}3 \times 20\text{E-}3}{9.5\text{E}2 \times 1.5\text{E-}14 \times 5\text{E-}3 \times 30^2} \times \left(\frac{20\text{E-}3}{2} + 10\text{E-}3\right) = -3.74269006\text{E-}3$$

La goutte atteint la feuille tout près de O' donc dans la zone 2.

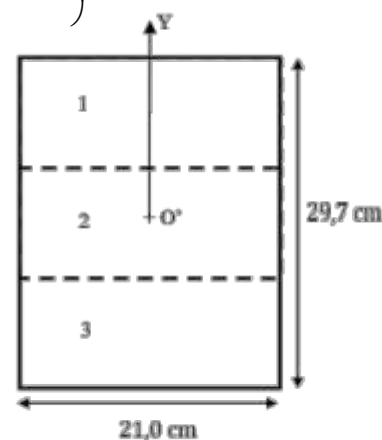


Figure 8 : Les différentes zones d'une feuille A4 (les trois zones sont de même dimension)

**PARTIE A : Étude d'une solution aqueuse d'acide butyrique**

**A.1. Donner l'expression du taux d'avancement final  $\tau$  de la réaction étudiée en fonction de l'avancement final  $x_f$  et de l'avancement maximal  $x_{\max}$ .**

$$\tau = \frac{x_f}{x_{\max}}$$

**A.2. Exprimer l'avancement maximal  $x_{\max}$  en fonction de  $C$  et  $V$ .**

Si l'acide butyrique est totalement consommé alors  $n_{\text{AH}} \text{ initiale} - x_{\max} = 0$ , donc  $x_{\max} = n_{\text{AH}} \text{ initiale}$   
 $x_{\max} = C \cdot V$ .

**A.3. Exprimer la valeur de l'avancement final  $x_f$  en fonction du  $pH$  et de  $V$ .**

$$[H_3O^+]_f = \frac{n_{H_3O^+}}{V} = \frac{x_f}{V}$$

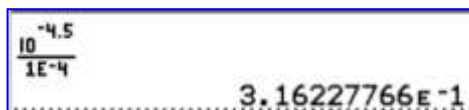
$$x_f = [H_3O^+]_f \cdot V$$

$$x_f = 10^{-pH} \cdot V$$

**A.4. Calculer le taux d'avancement final  $\tau$  et justifier que l'acide butyrique est un acide faible.**

$$\tau = \frac{x_f}{x_{\max}} = \frac{10^{-pH} \cdot V}{C \cdot V} = \frac{10^{-pH}}{C}$$

$$\tau = \frac{10^{-4,5}}{1,0 \times 10^{-4}} = 0,32 = 32 \%$$



$\tau < 100 \%$  donc l'acide butyrique est bien un acide faible.

On montre que les concentrations en quantité de matière à l'équilibre peuvent s'exprimer de la manière suivante :  $[AH(aq)]_{eq} = C \times (1 - \tau)$  pour l'acide butyrique,

$[A^-(aq)]_{eq} = C \times \tau$  pour sa base conjuguée.

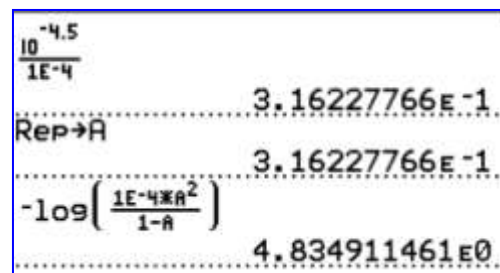
**A.5.1. Exprimer la constante d'acidité  $K_A$  de la réaction en fonction de  $\tau$  et  $C$ .**

$$K_A = \frac{[A^-(aq)]_{eq} \cdot [H_3O^+]_{eq}}{[AH(aq)]_{eq}} = \frac{[A^-(aq)]_{eq}^2}{[AH(aq)]_{eq}} = \frac{(C \cdot \tau)^2}{C \cdot (1 - \tau)} = \frac{C \cdot \tau^2}{(1 - \tau)}$$

**A.5.2. En déduire la valeur du  $pK_A$  de l'acide butyrique.**

$$pK_A = -\log K_A = -\log \left( \frac{C \cdot \tau^2}{(1 - \tau)} \right)$$

$$pK_A = -\log \left( \frac{1,0 \times 10^{-4} \times (3,16 \times 10^{-1})^2}{(1 - 3,16 \times 10^{-1})} \right) = 4,8$$

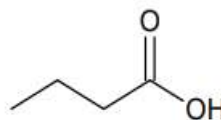
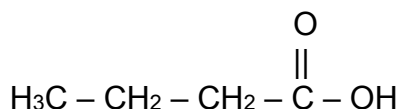


## **PARTIE B : Synthèse d'un ester à l'odeur de pomme à partir de l'acide butyrique**

### **B.1. Donner la formule semi-développée de l'acide butyrique.**

L'équation nous donne la formule topologique de l'acide :

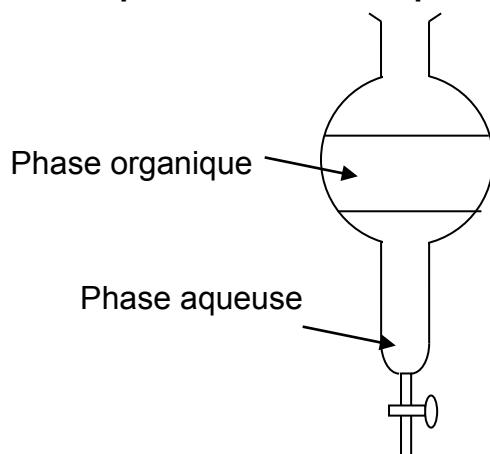
On en déduit sa formule semi-développée.



### **B.2. Préciser la phase dans laquelle se trouve le butanoate de méthyle.**

Le butanoate de méthyle étant très peu soluble dans l'eau salée, se trouve dans la phase organique.

### **B.3. Schématiser l'ampoule à décanter après décantation. Justifier la position des deux phases.**



La phase aqueuse a une densité proche de 1 tandis que celle de la phase organique est inférieure, en effet elle est proche de celle de l'ester égale à 0,892.

### **B.4. Attribuer un groupe d'atomes à chacun des pics entre les valeurs de nombre d'onde comprises entre 1600 cm<sup>-1</sup> et 4000 cm<sup>-1</sup>. Indiquer si ce spectre IR est compatible avec le produit de réaction attendu.**

Pic à 3000 cm<sup>-1</sup> correspond à la liaison C<sub>tri</sub>-H d'un ester ou à la liaison O-H d'un acide carboxylique.

Pic à environ 1750 cm<sup>-1</sup> correspond à la liaison C=O d'un ester ou à celle d'un acide carboxylique.

Ce spectre est compatible avec l'ester formé, mais il ne permet pas d'affirmer avec certitude que c'est bien lui et non pas de l'acide butyrique. Il faudrait des informations sur la largeur des pics dans la table de données de spectroscopie IR.

**PARTIE A : Étude de la réaction mise en jeu****A.1. Déterminer, en justifiant, la couleur d'une solution contenant des ions thiocyanatofer (III)  $[\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})$ .**

En solution aqueuse, le spectre d'absorption montre que la longueur d'onde la plus absorbée par ces ions est  $\lambda_{\text{max}} = 450 \text{ nm}$ . La couleur absorbée est donc le violet. La couleur perçue est complémentaire de la couleur absorbée, elle est donc opposée sur le cercle chromatique. La solution est de couleur jaune.

**Équation de la réaction modélisant la transformation qui se produit lors du test de détection :  $\text{Fe}^{3+}(\text{aq}) + \text{SCN}^{-}(\text{aq}) \rightleftharpoons [\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})$ .**

On dissout une quantité de matière  $n_1 = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol}$  d'ions fer (III)  $\text{Fe}^{3+}(\text{aq})$  et une quantité de matière  $n_2 = 5,0 \times 10^{-4} \text{ mol}$  d'ions thiocyanate  $\text{SCN}^{-}(\text{aq})$  dans un volume  $V = 500,0 \text{ mL}$  d'eau.

**A.2.1. Exprimer puis calculer le quotient réactionnel initial  $Q_{r,0}$ .**

$$Q_{r,0} = \frac{[\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})_0}{[\text{Fe}^{3+}(\text{aq})]_0 \cdot [\text{SCN}^{-}(\text{aq})]_0}, \text{ comme } [[\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})]_0 = 0 \text{ alors } Q_{r,0} = 0.$$

**Constante d'équilibre  $K$  associée à cette réaction à  $25^{\circ}\text{C}$  :  $K = 130$ .**

**A.2.2. En déduire le sens d'évolution spontané de la transformation.**

$Q_{r,0} < K$ , le système évolue spontanément dans le sens direct qui conduit à la formation des ions  $[\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})$ .

**PARTIE B : Analyse d'un échantillon****B.1. Gamme d'étalonnage****B.1.1. Préciser, en justifiant, la longueur d'onde à laquelle régler le spectrophotomètre pour réaliser les mesures d'absorbance.**

Afin de réduire l'erreur relative sur la mesure de l'absorbance, il faut des valeurs d'absorbance élevées. Pour cela, on choisit  $\lambda_{\text{max}} = 450 \text{ nm}$  pour laquelle les ions  $[\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})$  absorbent le plus.

**B.1.2. Dresser, en justifiant, la liste du matériel nécessaire à la réalisation de la solution étalon 5 à partir de la solution mère  $S_m$ .**

Solution mère :  $S_m$

Solution fille : étalon 5

$c_m = 2,0 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

$c_f = 2,0 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

$V_m = ?$

$V_f = 50,0 \text{ mL}$

Au cours d'une dilution la quantité de matière de soluté se conserve, ainsi  $n_m = n_f$ .

$$c_m \cdot V_m = c_f \cdot V_f$$

$$V_f = \frac{c_m \cdot V_m}{c_f}$$

$$V_m = \frac{2,0 \times 10^{-4} \times 50,0}{2,0 \times 10^{-3}} = 5,0 \text{ mL}$$

On verse dans un becher de la solution mère. À l'aide d'une pipette jaugée, on prélève  $5,0 \text{ mL}$  de solution mère que l'on verse dans une fiolle jaugée de  $50,0 \text{ mL}$ . On ajoute de l'eau distillée pour diluer.

**B.1.3.1. Donner l'expression de la loi de Beer-Lambert en définissant chaque terme et en donnant leur unité.**

$$A = k \cdot c$$

$A$  absorbance sans unité,

$k$  constante de proportionnalité, en  $\text{L.mol}^{-1}$ ,

$c$  concentration en quantité, en  $\text{mol.L}^{-1}$ .

### B.1.3.2. Indiquer si cette loi est vérifiée dans le cas étudié.

La courbe d'étalonnage est une droite passant par l'origine ce qui indique que la concentration est proportionnelle à la concentration comme l'indique la loi de Beer-Lambert qui est donc vérifiée.

### B.2. Dosage de la solution S

L'absorbance de l'échantillon S mesurée dans les mêmes conditions que pour les solutions étalons est  $A = 0,70$ .

B.2. Déterminer la masse d'ions  $\text{Fe}^{3+}(\text{aq})$  contenue dans un litre d'eau de la nappe phréatique.

*Dans cette question, le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.*

La courbe d'étalonnage indique un coefficient directeur  $k = 5079 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

D'après la loi de Beer-Lambert  $A = k \cdot c$  donc  $c = \frac{A}{k}$ .

$$c = \frac{0,70}{5079} = 1,4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\frac{0.70}{5079} = 1.37822406 \text{E}^{-4}$$

Ceci est la concentration en ions  $[\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})$  de la solution aqueuse S de volume égal à 50,0 mL.

Cette solution contient une quantité de matière en ions  $[\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})$   $n = c \cdot V$

$$n = 1,378 \times 10^{-4} \times 50,0 \times 10^{-3} = 6,9 \times 10^{-6} \text{ mol}.$$

$$1.37822406 \text{E}^{-4} \times 50 \text{E}^{-3} = 6.8911203 \text{E}^{-6}$$

En considérant que la réaction  $\text{Fe}^{3+}(\text{aq}) + \text{SCN}^{-}(\text{aq}) \rightleftharpoons [\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})$  est totale, alors la quantité de matière initiale en ions  $\text{Fe}^{3+}$  est égale à celle des ions  $[\text{FeSCN}]^{2+}(\text{aq})$  formés.

La solution S contenait  $n_{\text{Fe}^{3+}} = 6,9 \times 10^{-6} \text{ mol}$  qui ont été apportée par le volume  $V_0$  d'eau de la nappe phréatique.

Comme  $m = n \cdot M$  alors la masse d'ions  $\text{Fe}^{3+}$  dans le volume  $V_0$  vaut  $m_0 = 6,89 \times 10^{-6} \times 55,8 = 3,8 \times 10^{-4} \text{ g}$ .

La concentration en masse en ions  $\text{Fe}^{3+}$  est  $c = \frac{m_0}{V_0}$

$$c = \frac{3,85 \times 10^{-4}}{25,0 \times 10^{-3}} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\frac{6.8911203 \text{E}^{-6} \times 55.8}{25 \text{E}^{-3}} = 1.538098051 \text{E}^{-2}$$

Donc un litre d'eau de la nappe phréatique contient  $1,5 \times 10^{-2} \text{ g}$  d'ions  $\text{Fe}^{3+}$ .

$$\frac{3.845245127 \text{E}^{-4}}{25 \text{E}^{-3}} = 1.538098051 \text{E}^{-2}$$